This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06633881 9

DESCRIPTION ET USAGE

DE LA

RÈGLE A MIROIR.

DESCRIPTION ET USAGE

12114

DE LA

RÈGLE A MIROIR,

OU

ESSAI

SUR LA

THÉORIE ET LA PRATIQUE,

D'UN NOUVEL INSTRUMENT D'ARPENTAGE TRÈS COMMODE ET TRÈS SIMPLE, QUI POURROIT REMPLACER L'ASTROLABE OU LE SEXTANT, DANS LES CAS OU ON N'A PAS BESOIN D'UNE EXACTITUDE PARTICULIÈRE;

PAR

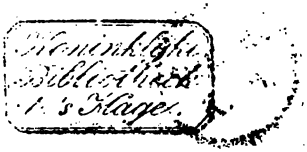
J. BARTOLDI SANDIFORT,

Etudiant en Physique à l'Université de Leide.

A LA HAYE

CHEZ LES HÉRITIERS DE J. VAN CLEEF, *Libraire.*

MDCCCIII.



19-

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
481947B
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
B 1949 L

A

MONSIEUR

J. F. VAN BEECK CALKOEN,

Professeur de Mathématiques à l'Université de Leide & Membre de plusieurs Sociétés Savantes, &c. &c.

MONSIEUR,

C'est à vous que je dois la connoissance de la théorie & de la pratique de la règle à Miroir que je me propose de décrire. Vous m'avez procuré tous les moyens nécessaires pour m'exercer par-là dans les différents cas de l'Arpentage: daignez regarder mes efforts & mes foibles essais, avec l'indulgence & la bonté qui vous caractérisent. Non content de me soutenir à l'entrée de la carrière que vous m'avez ouverte, vous m'avez engagé à publier ces premiers fruits de mes études, que j'avois commencées sous vos auspices. Vous avez bien voulu en même temps me garantir que cette publication pourra être utile aux jeunes amateurs des Mathématiques.

Fort

Leyde - Jan. 12, 1949

Fort de cette assurance, j'ose compter sur l'indulgence du public, ravi en même temps de pouvoir saisir par-là la première occasion qui se présente, pour vous offrir hautement l'hommage de ma vive reconnoissance, pour les soins & les peines que vous avez bien voulu prendre pour moi, en me permettant de profiter journellement de vos instructions. Dans l'espoir que vous voudriez accueillir cet hommage, ainsique celui de cet opuscule, j'ai l'honneur d'être avec un profond respect,

MONSIEUR,

Votre très humble & très obéissant Serviteur

J. BARTOLDI SANDIFORT.

DESCRIPTION ET USAGE

DE LA

RÈGLE À MIROIR.

INTRODUCTION.

On trouve dans un Journal Allemand, intitulé *Monathliche Correſpondentz* (Avril 1802.) par *le Baron von Zach*, une Deſcription de la Régle à Miroir, par L. A. Fallon, Lieutenant Ingénieur au ſervice de l'Empereur. Aſſuré de ſon utilité, d'après la deſcription qu'on en donne, j'ai eſſayé de m'en ſervir & de rechercher tous les cas où il ſeroit poſſible d'en faire uſage; ayant réuſſi, j'ai comparé mes réſultats avec ceux tirés d'un bon Aſtrolabe, & il me ſemble avoir remarqué que, dans la plus grande partie des cas, la Règle à Miroir ſeroit un Inſtrument convenable pour meſurer d'une manière facile, exacte & courte, la diſtance des villes, la hauteur des divers objets & le toiſé d'un terrein; cela m'a porté à publier une deſcription de cet Inſtrument pour montrer comment il faut s'en ſervir dans tous les cas, d'autant

qu'il n'eſt pas encore bien connu dans notre République & qu'il a toutes les qualités néceſſaires pour qu'on puiſſe l'employer avec ſuccès & commodité, ſi on le manie convenablement. Il eſt vrai que les réſultats n'en ſont pas ſi exacts que ceux d'un bon Aſtrolabe, mais puiſqu'on peut corriger & réduire preſqu'à rien les erreurs que l'on peut commettre par inexactitude ou par accident, ſuppoſant que l'inſtrument ſoit bien fait, on m'avouera facilement qu'avec un peu d'adreſſe & d'habitude, on s'en ſervira avec autant d'aiſance & d'avantage que des inſtruments ordinaires, d'ailleurs comme il eſt petit, on peut le porter ſans gêne ſur ſoi.

Avec la Règle à Miroir, ſa canne pour la poſer & la chaine d'Arpenteur, on pourra réſoudre les problêmes les plus difficiles de l'Arpentage.

On ſait que l'on a inventé un grand nombre d'inſtruments pour la pratique de la Géométrie, & qu'il ſeroit tout-à-fait impoſſible de ſe ſervir de tous; quelques-uns ſont d'un uſage trop gênant ou demandent trop de temps; ſouvent auſſi & preſque toujours cette grande exactitude eſt inutile, ainſi dans ces cas la Règle à miroir ſeroit l'inſtrument convenable.

PRE-

PREMIER CHAPITRE.

CONSTRUCTION DE LA RÈGLE A MIROIR.

Pl. 1. *Fig.* 1.

Toute la Machine ne doit avoir que ſept pouces de longueur & deux de largeur : la règle peut être faite d'un bois dur ou de cuivre, ce qui ſeroit préférable pour éviter les erreurs auxquelles la contraction du bois pourroit donner lieu. — A l'un des côtés de la règle ſe trouve un petit miroir quarré, dont la partie ſupérieure eſt ouverte pour que deux objets puiſſent y être vus en même temps, l'un dans le miroir & l'autre dans la partie découverte. Il faut tracer une ligne droite au milieu du verre du miroir, avant qu'il ſoit mis au teint. — Le miroir eſt attaché dans une ſorte de boîte de cuivre qui tourne ſur un axe, avec un petit pivot, qui, paſſant par la règle, peut être ſerré à volonté par une vis; en tournant le miroir, le trait tracé deſſus doit

reſter immobile, c'eſt-à-dire ne doit pas changer de place ; la boîte du miroir eſt garnie d'une charnière en bas, afin qu'on puiſſe le plier, pour le porter plus commodément. Il ſe trouve de l'autre côté de la règle une ſorte de viſière, avec une fente pour voir dans le miroir ; elle doit correſpondre avec le trait du verre, & peut avoir la largeur d'un $\frac{1}{10}$ de ligne, ce qui doit être égal à l'épaiſſeur du trait ; cette épaiſſeur ſur une longueur de ſept pouces couvre un arc de 4′ 54″. — Nous parlerons ci-après des fautes qui réſultent ſi la fente de la viſière eſt trop large ou trop étroite. — La viſière ſe plie auſſi ſur une charnière pour la même raiſon que le miroir. — Comme il eſt de la plus grande importance que cette règle ſoit exacte, il ne me ſemble pas hors de propos d'en expliquer encore plus chaque partie ſéparément.

Pl. 1. *Fig.* 2 & 3.

ABCD repréſente la planche de la règle, AD eſt de ſept pouces & AB de deux. FCGD eſt une plaque de cuivre quarrée très unie & polie, pour que le miroir tourne facilement deſſus dans le trou E, qui doit être parfaitement cylindrique. A & B ſont deux ſupports de cuivre pour attacher la viſière A′B′C′D′ (Fig. 3.) les points A′ & B′ entrent dans les trous A & B. EF

eſt

eſt la fente de la viſière qu'on peut rendre plus large ou plus étroite au moyen des vis G, qui font avancer & reculer les morceaux de cuivre G'.

Pl. 1. *Fig.* 4.

ABCD eſt le petit miroir, mis au teint juſqu'en EF, & attaché à la boite IKLM, qui ſe plie dans la charnière N.Q. P eſt le pivot qui paſſe par le trou E de la première figure, on peut le ſerrer avec une vis contre la règle pour aſſujettir le miroir plus ferme. La droite NQ & la plaque DF (Fig. 2.) doivent être auſſi plates que poſſible, pour ne pas laiſſer d'eſpace entre le miroir & la règle. GH eſt le trait marqué ſur le verre ſous teint. — Il doit exactement ſe rapporter à la fente EF de la viſière & au centre de P; quand on tourne le miroir, le trait tournera auſſi ſur ſon axe, mais elle ne doit pas changer de poſition.

Pl. 1. *Fig.* 1 & 5.

Au deſſous du miroir on a deux tenons en cuivre H, attachés à la plaque EF, ils ſervent à fixer le manche ABC (de Fig. 5, Pl. 1.) & la pointe C, en ſorte qu'on puiſſe le plier contre la règle; le bout C de ce manche

reſter immobile, c'eſt-à-dire ne doit pas changer de place ; la boîte du miroir eſt garnie d'une charnière en bas, afin qu'on puiſſe le plier, pour le porter plus commodément. Il ſe trouve de l'autre côté de la règle une ſorte de viſière, avec une fente pour voir dans le miroir; elle doit correſpondre avec le trait du verre, & peut avoir la largeur d'un $\frac{1}{10}$ de ligne, ce qui doit être égal à l'épaiſſeur du trait; cette épaiſſeur ſur une longueur de ſept pouces couvre un arc de 4′ 54″. — Nous parlerons ci-après des fautes qui réſultent ſi la fente de la viſière eſt trop large ou trop étroite. — La viſière ſe plie auſſi ſur une charnière pour la même raiſon que le miroir. — Comme il eſt de la plus grande importance que cette règle ſoit exacte, il ne me ſemble pas hors de propos d'en expliquer encore plus chaque partie ſéparément.

Pl. 1. *Fig.* 2 & 3.

ABCD repréſente la planche de la règle, AD eſt de ſept pouces & AB de deux. FCGD eſt une plaque de cuivre quarrée très unie & polie, pour que le miroir tourne facilement deſſus dans le trou E, qui doit être parfaitement cylindrique. A & B ſont deux ſupports de cuivre pour attacher la viſière A′B′C′D′ (Fig. 3.) les points A′ & B′ entrent dans les trous A & B. EF

eſt

eſt la fente de la viſière qu'on peut rendre plus large ou plus étroite au moyen des vis G, qui font avancer & reculer les morceaux de cuivre G'.

Pl. 1. *Fig.* 4.

ABCD eſt le petit miroir, mis au teint juſqu'en EF, & attaché à la boite IKLM, qui ſe plie dans la charnière NQ. P eſt le pivot qui paſſe par le trou E de la première figure, on peut le ſerrer avec une vis contre la règle pour aſſujettir le miroir plus ferme. La droite NQ & la plaque DF (Fig. 2.) doivent être auſſi plates que poſſible, pour ne pas laiſſer d'eſpace entre le miroir & la règle. GH eſt le trait marqué ſur le verre ſous teint. — Il doit exactement ſe rapporter à la fente EF de la viſière & au centre de P; quand on tourne le miroir, le trait tournera auſſi ſur ſon axe, mais elle ne doit pas changer de poſition.

Pl. 1. *Fig.* 1 & 5.

Au deſſous du miroir on a deux tenons en cuivre H, attachés à la plaque EF, ils ſervent à fixer le manche ABC (de Fig. 5. Pl. 1.) & la pointe C, en ſorte qu'on puiſſe le plier contre la règle; le bout C de ce manche

ſert à appliquer la règle dans la canne; quand on ſe ſert de cette règle on leve la viſière ainſi que le miroir & la pointe C pour les mettre perpendiculaires ſur leur axe.

SECOND CHAPITRE.

SUR L'USAGE DE LA RÈGLE A MIROIR.

La Règle à miroir ſert principalement à déterminer l'angle droit que deux objets font avec le point où l'on ſe trouve. Pour cet effet il eſt néceſſaire que le miroir ſoit tourné de manière qu'il faſſe un angle de 45° avec la viſière ou plutôt que ∠GFE ſoit = 45° (Pl. 1. Fig. 1.) puiſqu'on ſait, d'après les loix de la nature, qu'un rayon de lumière entre dans un miroir plat avec le même angle qu'il en ſort. Le miroir étant mis dans la poſition requiſe, on regarde par la fente de la viſière vers un objet quelconque, de ſorte qu'il ſoit couvert par le trait du milieu du miroir. Si on remarque qu'en même temps un autre objet ſoit ſous le trait de la partie du miroir non couverte, on ſaura que ce dernier objet fait

avec

avec le premier un angle droit au miroir ſur la ligne tirée de l'œil juſqu'au premier objet.

Pl. 2. Fig. 1.

Suppoſons que EF eſt le miroir ∠BGE=∠FGD=45° ſoit *b* l'objet vu dans la partie découverte du miroir caché ſous le trait, l'œil placé en D; ſi alors on apperçoit un autre objet *a* dans l'autre partie du miroir dans la droite *b*GD auſſi caché ſous le trait, on dira que ∠FGD ſera = ∠EG*a* & par conſéquent auſſi = 45° ∠*b*G*a* eſt ∠FGD+∠EG*a* tous deux trouvés = 45°, donc *b*G*a*=90° ou la ligne *a* G perpendiculaire ſur la droite *b* D. par-là les objets *a* & *b* font un angle droit avec le point G.

Il eſt clair que nul autre objet que *a* ne peut être vu en G dans la droite *b* D; car ſuppoſons qu'on n'y voit pas *a* mais *a'*, ou que ∠EG*a'* eſt plus petit que 45° on m'avouera facilement d'après la loi ci-deſſus déſignée que ∠FGD' ſera =∠*a*EG ou plus petit que 45°; donc une partie de ∠DGF; par conſéquent l'objet *a'* ne peut-être vu en G que du point D' qui ſera à côté de la viſière; deſorte qu'il ne ſera pas dans la même droite que le point *b*; ceci pourroit auſſi arriver ſi le miroir étoit mal placé.

TROISIÈME CHAPITRE.

DE LA MANIÈRE DE SE SERVIR DE LA RÈGLE À MIROIR DANS TOUS LES CAS DE L'ARPENTAGE.

On diviſe ordinairement en deux parties les différents cas qui ſe préſentent dans la pratique de la Géométrie: l'une traite de la manière de meſurer des diſtances, & l'autre de celle de déterminer des hauteurs; puis on les ſubdiviſe en diſtances ou hauteurs acceſſibles, celles qui ne le ſont pas, celles qui ſe trouvent dans le même plan horizontal, celles placées dans différents plans, enfin celles qui ont une poſition verticale & celles qui ne l'ont pas. — Je me ſuis propoſé de faire voir, par des exemples de chacun de ces cas, le dégré d'exactitude auquel on peut parvenir par la Règle à miroir.

Premier cas où l'on ſe propoſe de toiſer un terrein acceſſible.

Pl. 2. *Fig.* 2.

On ſait que la meilleure manière de meſurer des diſtances acceſſibles eſt de réunir les divers objets par autant de triangles & de les calculer d'après pluſieurs baſes meſurées avec exactitude; mais on ſait auſſi que cette méthode prend ſouvent trop de temps, & demande des inſtruments & des obſervations trop précis pour pouvoir s'en ſervir dans tous les cas avec ſuccès.

L'autre manière de toiſer un terrein, en déterminant la ſituation de quelques points, par rapport à une baſe priſe à volonté, pourroit donc être, ce me ſemble, plus aiſée & plus prompte: elle peut-être faite avec la règle à miroir & une chaine d'Arpenteur; en voici la manière:

Voulant déterminer la courbure d'une rivière, on prend une baſe AB bien meſurée, puis on s'avance & l'on recule jusqu'à ce qu'on ait trouvé le point N où on voit les objets A & F également cachés ſous les traits du miroir & de ſa partie ouverte, on meſure NA & NF, alors on cherche le point L ou celui qui fait découvrir les points A & C en même temps, on prend la meſure de AL & de LC, ce que l'on continue de faire pour tous les points déſirés; on deſſine alors la baſe & les divers objets d'après une échelle diminuée, puis ayant

orienté le terrein, on aura tous les points néceſſaires pour tirer la courbure de la rivière.

Second cas: Meſurer les diſtances A & B, quand on ne peut venir qu'en B.

Pl. 2. Fig. 3.

On veut ſavoir la diſtance des points A & B ou l'éloignement d'une ville à une autre. Suppoſant qu'on peut venir en B, on prolonge la droite AB jusqu'en E, on place la règle en B & on regarde vers A pour découvrir un point C perpendiculaire ſur AB où on fait mettre un piquet. Puis on va de B en C & on regarde vers A, pour trouver le point E dans le prolongement de AB, tel que CE eſt | ſur AC ou A & E étant également deſſous les traits du miroir. On meſure EB & BC, les angles CBE & ACE ſont droits & BC eſt commun: par-là les ΔΔBCA & BCE ſont ſemblables, donc ſi AB eſt = X, on aura EB : BC = BC : X ou $X = \frac{\overline{BC}^2}{EB}$, la diſtance cherchée.

Exemple. Pl. 2. Fig. 3.

J'ai trouvé BC = 9. 74 & BE = 7. 65 verges, donc

$X = \frac{\overline{BC}^2}{EB} = \frac{\overline{9.74}^2}{7.65}$ au Log. X = Log. $\overline{9.74}^2$ — Log. 7. 65.

Log. $\overline{9.74}^2$ = 1. 9762256
— Log. 7. 65 = 0. 8836614

Log. 12. 375 = 1. 0925642 = Log. X. (*).

Puis additionant AB & BE, j'ai eu 12. 375 + 7. 65 = 20. 025 verges = AE; Meſurant après cela la ligne AE', je l'ai trouvée = 19. 933 verges, ſouſtrayant ces deux valeurs pour EA, la différence étoit 0, 092: verges ou 9. 2 pouces; inexactitude qui n'eſt presque pas ſenſible ſur une diſtance de près de 200 pieds.

Autre Exemple Comparé avec l'Aſtrolabe ou le Graphomètre.

Pl. 2. *Fig.* 5.

J'ai trouvé avec l'Aſtrolabe l'angle ABC′ = 28° 30′, la ligne BC′ = 28, 7 verges, donc AC′ = BC′ × tang. B ou Log. AC′ = Log. BC′ + Log. tang. B.

Log

(*) On comptera dans tout le traité les verges ſur 10 pieds géométriques.

qu'il n'eſt pas encore bien connu dans notre République & qu'il a toutes les qualités néceſſaires pour qu'on puiſſe l'employer avec ſuccès & commodité, ſi on le manie convenablement. Il eſt vrai que les réſultats n'en ſont pas ſi exacts que ceux d'un bon Aſtrolabe, mais puiſqu'on peut corriger & réduire preſqu'à rien les erreurs que l'on peut commettre par inexactitude ou par accident, ſuppoſant que l'inſtrument ſoit bien fait, on m'avouera facilement qu'avec un peu d'adreſſe & d'habitude, on s'en ſervira avec autant d'aiſance & d'avantage que des inſtruments ordinaires, d'ailleurs comme il eſt petit, on peut le porter ſans gêne ſur ſoi.

Avec la Règle à Miroir, ſa canne pour la poſer & la chaine d'Arpenteur, on pourra réſoudre les problêmes les plus difficiles de l'Arpentage.

On ſait que l'on a inventé un grand nombre d'inſtruments pour la pratique de la Géométrie, & qu'il ſeroit tout-à-fait impoſſible de ſe ſervir de tous; quelques-uns ſont d'un uſage trop gênant ou demandent trop de temps; ſouvent auſſi & preſque toujours cette grande exactitude eſt inutile, ainſi dans ces cas la Règle à miroir ſeroit l'inſtrument convenable.

PRE-

PREMIER CHAPITRE.

CONSTRUCTION DE LA RÈGLE À MIROIR.

Pl. 1. *Fig.* 1.

Toute la Machine ne doit avoir que ſept pouces de longueur & deux de largeur : la règle peut être faite d'un bois dur ou de cuivre, ce qui ſeroit préférable pour éviter les erreurs auxquelles la contraction du bois pourroit donner lieu. — A l'un des côtés de la règle ſe trouve un petit miroir quarré, dont la partie ſupérieure eſt ouverte pour que deux objets puiſſent y être vus en même temps, l'un dans le miroir & l'autre dans la partie découverte. Il faut tracer une ligne droite au milieu du verre du miroir, avant qu'il ſoit mis au teint. — Le miroir eſt attaché dans une ſorte de boîte de cuivre qui tourne ſur un axe, avec un petit pivot, qui, paſſant par la règle, peut être ſerré à volonté par une vis; en tournant le miroir, le trait tracé deſſus doit

rester immobile, c'est-à-dire ne doit pas changer de place ; la boîte du miroir est garnie d'une charnière en bas, afin qu'on puisse le plier, pour le porter plus commodément. Il se trouve de l'autre côté de la règle une sorte de visière, avec une fente pour voir dans le miroir ; elle doit correspondre avec le trait du verre, & peut avoir la largeur d'un $\frac{1}{10}$ de ligne, ce qui doit être égal à l'épaisseur du trait ; cette épaisseur sur une longueur de sept pouces couvre un arc de 4′ 54″. — Nous parlerons ci-après des fautes qui résultent si la fente de la visière est trop large ou trop étroite. — La visière se plie aussi sur une charnière pour la même raison que le miroir. — Comme il est de la plus grande importance que cette règle soit exacte, il ne me semble pas hors de propos d'en expliquer encore plus chaque partie séparément.

Pl. 1. *Fig.* 2 & 3.

ABCD représente la planche de la règle, AD est de sept pouces & AB de deux. FCGD est une plaque de cuivre quarrée très unie & polie, pour que le miroir tourne facilement dessus dans le trou E, qui doit être parfaitement cylindrique. A & B sont deux supports de cuivre pour attacher la visière A′B′C′D′ (Fig. 3.) les points A′ & B′ entrent dans les trous A & B. EF est

Log. b E = Log. 30 + Log. tang. 44°45′

Log. 30 = 1.4771213

+Log. tang. 44°45′ = 9.9962100

1.4733313 = Log. 29.7393

+D′C′ = 4.1818

ba = 33.9211 pieds.

Avec la Règle à miroir, je cherchai l'angle droit bDA j'eus alors DE = 11.6 DC = 4.6 donc $ba = \frac{\overline{11.6}^2}{4.6} + 4.6$

$= \frac{\overline{11.6}^2 + \overline{4.6}^2}{4.6} = \frac{155.72}{4.6} = 33.85$. La différence entre ces deux résultats est peu considérable.

Il est vrai que dans la pratique il est assez difficile de fixer toujours de la visière au centre d'une tour; mais il est clair aussi que ce point F (qui est celui que l'on doit fixer pour regarder de D en ligne droite au centre) se calcule facilement: car si l'on peut s'approcher assez de la tour, comme nous l'avons supposé, on pourra aisément mesurer son épaisseur & connoître ses côtés, si elle est quarrée, ou son diamètre, si elle est ronde. En tout

cas, on saura la grandeur de $aG = \frac{1}{2} GH$. Supposant $FG = X$ on aura par la similitude des $\Delta\Delta$ aGF & aCD que

$$aG : GF = aC : CD \text{ ou } X = \frac{CD \times aG}{aC}$$

Exemple pour le rond.

Soit la bâse $GC = 30$ toises $DC = 5$ pieds: on a trouvé, par exemple, la périphérie de la tour $= 150$ pieds, on cherchera son diamètre par la proportion.

Diam. : Périph. $= 1 : 3,14159$ &c. ou

Diam. $= \frac{\text{Périph.}}{3.14159}$; ce qui est en notre cas

$HG = 47.746$ pieds & $aG = 23.873$ X est trouvé $= \frac{CD.aG}{aC}$; donc il sera $= \frac{900}{303.873} = 2.9617$ pieds $=$ la hauteur du point de mire.

Pl. 2. Fig. 9.

Il en est de même avec le quarré; mais le calcul en est plus facile: car ayant mesuré les côtés, on saura aussi la droi-

droite αG qui eſt $\frac{1}{2}$ HG & $G\gamma = \frac{1}{2}$ GK; donc par le calcul précédent on aura la valeur de X ou le point à fixer.

Mais tout cela ſuppoſe que le terrein autour de la tour ſoit également bon partout, ce qu'on ne trouve guerres; il pourroit arriver que le terrein qui eſt devant un des côtés de la tour fût trop marécageux, tellement qu'on ne pourroit pas y prendre une baſe. Dans ce cas, on cherche autour de l'objet dont on veut ſavoir la hauteur une place convenable pour l'opération; cela pourroit être ſur le coin de la tour en direction de ſa diagonale ou entre la diagonale & le milieu d'un des côtés du plan; il eſt évident que dans ces trois cas on aura d'autres valeurs pour X reſtant toujours à la même diſtance du centre de la tour. ——

Suppoſons qu'on peut venir en face de la tour. A ſera alors le centre & $A\alpha$ le demi Diamètre; puis on aura pour le premier cas:

Pl. 2. *Fig.* 10.

$A\alpha$; X = AC: DC; prenant enſuite $A\alpha = a$ AC = b & DC = c X ſera = $\frac{ac}{b}$.

Pl. 2. *Fig.* 11.

Quand on ne peut venir qu'au coin α du plan de la tour, on aura $A\alpha : X = AC : DC$; mais $A\alpha$ étant ici $= a\sqrt{2}$. X ſera $= \frac{ca\sqrt{2}}{b}$

Enfin ſi le terrein eſt tout-à-fait impraticable, excepté dans la direction de la ligne AC (*Pl.* 2. *Fig.* 12.) qui ſe trouve entre le milieu d'un des côtés de la tour & ſon coin, il ſuivra $A\alpha : X = AC : DC$, ou ſi $\alpha\gamma = d$ & $B\alpha = a - d = u$ $A\alpha$ ſera $= \sqrt{a^2+u^2}$ & $X = \frac{c\sqrt{a^2+u^2}}{b}$.

Il ſeroit bon de ſavoir ſi la ligne qui paſſe autour de la tour par tous les points de mire eſt droite ou courbe: il eſt évident qu'elle ne peut être parallele à l'Horizon, mais inclinée étant $X = \frac{ac\sqrt{2}}{b}$ plus grand que $X = \frac{ac}{b}$

PROBLEME.

Etant donné la hauteur de X pour les différents points de mire, on demande de déterminer la poſition & la qua-

lité

ſité de la ligne qui paſſe autour de la tour uniſſant les divers points de mire.

SOLUTION.

Nous avons ſuppoſé ci-deſſus qu'on reſte toujours à la même diſtance du centre de la tour, ainſi en marchant on décrira un cercle avec les pieds. Mais les yeux de l'obſervateur étant élevés de quelques pieds au-deſſus de la terre, il eſt évident qu'en marchant ils décriront un cône, dont la pointe ſera dans le centre du plan de la tour. Or il eſt connu que ſi un plan quelconque coupe le cône verticalement ou parallelement à ſon axe, la courbe qui en réſulte ſe nomme *Hyperbole*. Dans notre cas, chaque côté de la tour coupe le cône verticalement, ainſi on pourroit conclure, ſans crainte d'erreur, que la ligne qui paſſe autour de la tour uniſſant les divers points de mire eſt compoſée de quatre *Courbes* ou *Hyperboles*.

Ce que nous venons de prouver par le raiſonnement doit ſuivre auſſi de la formule; prenons dabord:

$X = \frac{c\sqrt{a^2+u^2}}{b}$ ou $b^2x^2 = c^2a^2 + c^2u^2$; ſubſtituons enſuite pour X la valeur $Z + \frac{ca}{b}$ & on aura

$b^2Z^2 + 2baZ + a^2c^2 = a^2c^2 + c^2u^2$, ce qui fait

$u^2 =$

$u^2 = \frac{b^2}{c^2} Z^2 + 2abcZ$. Ce qu'il falloit démontrer.

Cinquième cas. Pour trouver la hauteur des objets inacceſſibles.

Pl. 2. Fig. 13.

On prend la Règle de la même manière que dans le IVe. cas. Soit la tour perpendiculaire ſur ſon axe & le point où l'on ſe trouve dans le même plan horizontal. On place la Règle en d & on regarde ſur (a & f) pour trouver l'angle droit du point d. On meſure ($e f$) & ($d e$). Après quoi on recule jusqu'en ∂ pour chercher l droit de a F avec le point ∂. puis on meſure auſſi ∂E & FE, les ΔΔ abd & def étant ſemblables ainſi que les ΔΔ. $ab\partial$ & ∂FE; on aura des deux premiers $fe : ed = ab : bd$ au $ab = \frac{bd, fe}{ed}$ & des deux ſeconds $ab : b\partial = FE : \partial E$ ou $ba = \frac{FE.\ b\partial}{\partial E}$ donc on a deux valeurs pour ab. Mais de $= \partial E \cdot b\partial = bd + d\partial$ & $d\partial = cE$

$= eE$ par la $b\delta$. $FE = [bd + d\delta]$. FE d'où il suit que bd est $= \frac{eE.\ FE}{fe - FE}$ mais ab est $= \frac{bd.\ fe}{ed}$ donc

$$ab = \frac{(eE.\ FE).\ fe}{(fe - FE).\ ed} \text{ \& } aC = ab + bC = ab + de$$

$$aC = \frac{(eE.\ FE).\ fe}{(fe - FE)\ ed} + ed = \text{la hauteur cherchée.}$$

Exemple comparé avec l'Aſtrolabe.

J'ai pris $\angle a\delta b = 31°$ $\angle a\delta b = 74°$ $\delta E = de = 4.6$. pieds & $\delta b = 4.1$ verges; donc par l'équation

$$ab = \frac{\delta b \times \text{Sin. } \angle a d \delta.\ \text{Sin. } \angle a \delta d}{\text{Sin. } \angle (a d \delta + a d)} \text{ j'ai}$$

$$ab = \frac{4.1 \text{ Sin. } 74°.\ \text{Sin. } 31°}{\text{Cos. } 47°}$$

Log. 4.1	= 1. 6127839
Log. Sin. 74°	= 9. 9828416
Log. Sin. 31°	= 9. 7118393
	1. 3074648
— Log. Cos. 47°	= 9. 8337833
	1. 4736815 = Log. 29.7633 = Log. ab.
	$+ de = 4.6$
	34, 3633 = Log. aC.

Avec la Règle à miroir ayant fait les angles $adf = a\delta F = 90°$, j'ai trouvé $fe = 4.8$ pieds $FE = 3.95$ $de = 4.4$ & $eE = 5.98$ pieds, mais étant

$$aC = \frac{(eE \times FE)\, fe}{(fe - FE)\, dd} + de \text{ ou}$$

$$aC = \frac{(5.96 \cdot 395)\, 4.8}{3.74} + 4.4$$

Log. 5. 96 = 0. 7752463

Log. 3. 95 = 0. 5965971

Log. 4. 8 = 0. 6812412

2. 0530848

Log. 3. 74 = 0. 5728716

Log. 30. 072 = 1. 4802132 = Log. ab.

donc $ab = 30.072$ & $ac = 34.472$.

On n'a qu'une différence de moins de 1.5 pouces dans les réſultats de l'Aſtrolabe & de la Règle à miroir.

Sixième cas : Déterminer le point qui ſe trouve perpendiculairement ſous un autre auprès duquel on peut venir.

Pl. 2. *Fig.* 14.

Suppoſons qu'on veuille ſavoir la hauteur intérieure d'une Egliſe, ou découvrir le point A. —— Cherchez le point

point B. mettez pour cet effet à quelque distance le piquet GE ⊥ sur HE & égal à la hauteur du miroir ou de C. placez l'oeil en ∂ & regardez vers G jusqu'à ce que vous voyez le point A couvert par le trait du miroir & G par celui du verre; alors AC sera ⊥ sur GC. Si alors on fait descendre une perpendiculaire de C, le point où elle touchera la terre sera celui qu'on désire. — Voulant ensuite savoir la hauteur de A, on cherche l'angle droit & A & B. ou le point D & on mesure DC = HB, & CB. puis on aura $AC = \frac{\overline{DC}^2}{CB}$ & $AB = \frac{\overline{CD}^2 + \overline{CB}^2}{CB}$ $= \frac{\overline{DB}^2}{CB}$.

Exemple comparé avec l'Astrolabe.

Après avoir déterminé, tant avec l'Astrolabe qu'avec la Règle à miroir, le point B. qui se trouvoit sous un autre A. & la différence n'étant presque pas sensible, j'allai chercher la hauteur de A ou la distance des points entre eux: j'eus alors avec l'Astrolabe $\angle AD'C = 58°10'$ la base $H'B = 21$ pieds & $D'H' = 4.4$ pieds; par-là j'eus $AB = H'B \times$ tang. $\angle AD'C + D'H'$ ou

$AB = 33.825 + 4.4 = 38.225$ pieds.

J'ai trouvé ensuite avec la Règle à miroir l'angle droit

dans le point D. DH étant = 4. 25 & HB = 12 pieds

j'eus $AB = \frac{\overline{BH}^2 + \overline{DH}^2}{DH} = \frac{BD^2}{DH} = \frac{162.0625}{4.25} = 38,132.$

ainſi la différence des réſultats n'eſt que de 0, 93 de pouce.

On pourroit facilement faire le problème inverſe pour découvrir le point A ou celui qui ſe trouve deſſus un autre point B. car mettant la Règle avec ſa canne ſur HE les angles HBC & CBE ſeront droits; prenant, comme auparavant GE = CB. puis regardant de B vers G, de ſorte qu'il ſoit couvert du trait du verre, l'objet (A) qui ſe trouvera alors couvert du trait du miroir ſera le point deſiré.

Septième cas: Déterminer le point qui eſt en ligne horizontale avec le trait du Miroir.

Pl. 2. *Fig.* 15.

Placez la Règle verticalement & le miroir tourné vers E; faites deſcendre une perpendiculaire de B jusqu'en C. pla-

placez l'oeil en A. & regardez vers le point C qui ſera couvert par le trait du verre ; l'objet E qui ſera alors couvert du trait du miroir eſt celui qu'il vous faut, puiſque $\angle ABE = \angle EBC = 90°$.

QUATRIÈME CHAPITRE.

MANIÈRE DE DISPOSER LA RÈGLE À MIROIR.

Pl. 3. *Fig.* 1.

J'ai déjà fait remarquer qu'il eſt de la plus grande importance que le miroir de notre inſtrument ait une poſition convenable, c'eſt-à-dire qu'il ſoit poſé ſous un angle de 45°. Il ſuffit pour cela d'employer le Δ pythagorique : voulant déterminer un angle droit, on prend trois cordes, l'une de 30 pieds, l'autre de 40 & la troiſième de 50 ; on étend la première de A en C, puis on attache celle de 40 pieds en A & celle de 50 pieds en C. On décrit un arc avec chacune de ces deux cordes, le point B où ces deux arcs ſe coupent eſt le point deſiré, pour que $\angle A$ ſoit $= 90°$. Ayant ainſi exactement déterminé l'angle droit, on place la Règle en A, regardant vers C ; on tourne alors le miroir ſeul juſ-

jusqu'à ce qu'on voie B & C couverts par les traits du miroir qui ſera alors placé comme il faut; on aura ſoin de bien marquer ſur la plaque de cuivre la poſition trouvée du miroir, afin de pouvoir l'y remettre toujours.

Pl. 3. *Fig.* 2.

On voit aiſément ſi le miroir eſt placé ſous un angle de 45° ou non, en plaçant la Règle dans la droite AD, pour déterminer ∠ droit de B & D ou le point C. puis on tourne la Règle, regardant ſur B; quand alors le point A eſt en même temps couvert du trait, le miroir ſera bien placé puisqu'on peut être ſûr que ∠ACB = ∠BCD & par conſéquent = 90°.

Manière de déterminer un angle quelconque avec la Règle à Miroir.

Nous n'avons parlé jusqu'ici que de la manière de déterminer les angles droits avec la Règle à miroir: on pourroit cependant s'en ſervir auſſi pour toutes ſortes d'angles; il eſt vrai qu'avec l'Aſtrolabe l'opération ſeroit ſouvent faite plus

plus vîte, mais il me ſemble qu'avec l'autre inſtrument les réſultats ſeroient bons, pourvu qu'on eût bien meſuré.

Pl. 3. *Fig.* 3.

Suppoſant qu'on voulut connoître l'angle que trois objets font enſemble ou ∠ABC. Je placerois la Règle en B & je regarderois vers A jusqu'à ce que ce point fût couvert par le trait de la partie non couverte du teint. Faiſant mettre un piquet en D. éloigné de quelques pieds de la Règle dans l'alignement de AB, de B j'irois ſur la ligne BC, pour chercher ∠ droit de D & B ou le point F; je meſurerois exactement DF & BF; par-là j'aurois la grandeur de ∠ABC. car tang. $\angle ABC = \frac{DF.}{BF.}$ Il eſt évident que la moindre faute faite en meſurant ſeroit très ſenſible ſur l'angle B.

Exemple comparé avec l'Aſtrolabe.

Pl. 3. *Fig.* 3.

J'ai trouvé avec l'Aſtrolabe ∠ABC = 41° 30′. faiſant mettre enſuite un piquet en D. dans la droite AB & déterminant avec la Règle l'angle droit de A & B ou le point F, après quoi meſurant DF & BF, j'ai trouvé le premier = 2, 3 verges & l'autre = 2, 6 verges; travaillant

lant par logarithmes, j'eus Log. tang. B = Log. DF — Log. BF.

Log. DF = 0. 3617278
— Log. BF = 0. 4149733

Log. tang. ∠B = 9. 9467545 = Log. tang. ∠41° 29′ 47, 3″

En ſorte que la différence entre ces deux réſultats n'eſt pas tout-à-fait d'une minute.

Il pourroit arriver qu'il y eut un obſtacle quelconque entre B & A (tels qu'en fig. 4. pl. 3.): on ne pourroit pas alors mettre le piquet en D; en ce cas là je placerois, comme auparavant, la Règle en B, pour trouver l'angle droit du point C avec un autre E pris à volonté; je prolongerois la droite B E jusqu'en G; puis j'irois de B en D′ pour trouver le point qui couvriroit les deux objets A & B en même temps par le trait du verre; j'y placerois un piquet cherchant l'angle droit de B & D′ ou le point F, meſurant enſuite D′F & BF. ∠D′ étant = ∠ABC par conſéquent tang. D′ = tang. ∠ABC = $\frac{BF}{D'F}$.

Exemple comparé avec l'Aſtrolabe.

∠ABC étant trouvé = 70°, j'ai reculé jusqu'en D′ reſtant toujours dans le prolongement de la droite AB. ayant

ayant placé un piquet en D′ j'ai été avec la Règle vers B, pour trouver le point G ou celui qui ſeroit perpendiculaire ſur BC. Après quoi j'ai cherché dans l'alignement de BG le point F ou l'angle droit de D′ & B. J'ai meſuré enſuite BF & D′F dont le premier avoit 11 verges & l'autre 4. ∠BD′F étant = ∠ABC, Sa tangente $\frac{BF}{D'F}$ ſera auſſi = la tangente de ∠ABC &

Log. tang. ABC = Log. BF — Log. D′F

Log. BF = Log. 11 = 1.0413926

— Log. D′F = Log. 4 = 0.6020599

Log. tang. ∠ABC = 0.4393327 = Log. tang. 70° 1′; ainſi la différence des réſultats de ces deux opérations n'a été que d'une minute ſur un angle de 70°.

Si l'on peut déterminer un angle quelconque avec la Règle à miroir, le problème ſuivant ne ſera pas non plus difficile à réſoudre.

Problème. Pl. 3. *Fig.* 5.

Etant donné la diſtance mutuelle de trois clochers d'une ville & les angles qu'ils font enſemble (ou les droites AB. BC & AC

AC & les angles A, B & C.) trouver l'éloignement de chacun de ces clochers d'un point D hors de cette ville.

Il pourroit très bien arriver qu'un Ingénieur fut dans le cas du problème; afin de le réſoudre comme il faut, il a beſoin d'une bonne carte de la ville pour meſurer les côtés & les angles du Δ ABC. Il meſureroit enſuite avec l'Aſtrolabe les angles BDA & ADC & par les analogies que les Δ^s même donnent, il pourroit aiſément calculer les diſtances BD. AD & DC. — On ne travaillera certainement pas ſi vite dans ce cas-là avec la Règle à miroir, mais il peut ſe préſenter des occaſions où l'on doive abſolument connoître l'éloignement du lieu où on ſe trouve; à la ville, on peut manquer des inſtruments néceſſaires; alors il ſeroit préférable, à mon avis, de prendre un peu plus de peine, pourvu qu'on parvienne à ſon but.

Pl. 3. *Fig.* 5.

Placez la Règle en D, déterminez les angles droits ADG &c. &c. regardez vers B, faites mettre un piquet en BD en F, allez enſuite ſur la droite GD, pour chercher

cher l'angle droit de D & F ou le point E, mesurez FE, & ED ∠EFD étant = ∠BDA, on aura tang. BDA = $\frac{ED}{EF}$. On fait la même chose pour l'angle ADC.

Exemple comparé avec l'Astrolabe.

J'ai fait ∠ADB = 35° = a & ∠CDA = b = 24°; après quoi j'ai déterminé avec la Règle les angles droits ADG & ADG', & dans les points E & E' les angles droits DEF & DE'F'. DE avoit 17. 575 pieds EF = 25. 1 pieds E'F' = 26. 954 & DE' = 12 $\frac{DE}{EF}$ étant la tangente de ∠BDA & $\frac{DE'}{F'E'}$ la tangente de ∠ADC.

J'ai eu, tang. ∠BDA = $\frac{17.575}{25.1}$ = tang. 34° 59′ $\overline{58.8}''$

& tang. ∠ADC = $\frac{12}{26.954}$ = tang. 23°. 59′ $\overline{58.4}''$ la différence du premier résultat est $\overline{1.2}''$ & de l'autre $\overline{1.6}''$

Ayant ainsi trouvé ces angles, on aura dans le Δ BCD. que BC : BD = $\sqrt{a+b}$: Sin. C' ou BD = $\frac{BC \text{ Sin. } C'}{\sqrt{a+b}}$ & dans le ΔBAD que BA : BD = $\sqrt{a}$: Sin. e

ou $BD = \frac{\text{Sin. } e. \text{ BA}}{\text{f. } a} = \frac{\text{BC Sin. C}'}{\text{f}\overline{a+b}}$, mais $\angle C' + \angle b =$

$\angle e + \angle f$ étant ($\angle H = \angle h$) ainſi $\angle e = \angle b + \angle C' - \angle f$;

ſubſtituant cette valeur dans $\frac{\text{Sin. } e. \text{ BA}}{\text{Sin. } a} = BD$, on aura

$\frac{\text{BC Sin. C}'}{\text{f}\overline{a+b}} = \frac{\text{BA Sin. } (C' + b - f)}{\text{Sin. } a}$ ou $\frac{\text{BC Sin. C}'}{\text{f}(a+b)} =$

$\frac{\text{BA Sin. C}' \ (\text{Cos. } \overline{b-f} + \text{Cos. C}' \text{ Sin. } \overline{b-f})}{\text{Sin. } a}$. diviſé par

Sin. C', on aura $\frac{\text{BC}}{\text{f}\overline{a+b}} = \frac{\text{BA Sin. C}' \text{Cos. } \overline{b-f} + \text{Cos. C}' \text{Sin. } \overline{b-f}}{\text{Sin. C}' \text{ Sin. } a}$.

mais $\frac{\text{Sin. C}'}{\text{Sin. C}'} = 1$ & $\frac{\text{Cos. C}'}{\text{Sin. C}'} = \text{Cotang. C}'$; donc $\frac{\text{BC}}{\text{f}\overline{a+b}}$

$= \frac{\text{BA}, \ (\text{Cos. } \overline{b-f} + \text{Cot. C}' \text{Sin. } \overline{b-f})}{\text{f}\overline{a}}$. donc $\frac{\text{BC Sin. } a}{\text{BA f}\overline{a+b}}$

$= \text{Cos. } \overline{b-f} + \text{Cot. C}' \text{ Sin. } \overline{b-f}$. ou

$\text{Cotang. C}' = \frac{\text{BC Sin. } a}{\text{BA Sin. } \overline{a+b}} - \frac{\text{Cos. } \overline{b-f}}{\text{Sin. } \overline{b-f}}$. mais tang. $= \frac{1}{\text{Cot}}$

par la tang. $C' = \frac{\text{BA Sin. } (a+b). \text{ Sin. } (b+f)}{\text{BC Sin. } a - \text{BA Sin. } (a+b) \text{ Cos. } (b+f)}$.

La pointe A du $\triangle$ pouvant être à l'autre coté de BC

on

ou en A′, l'angle C′ changera ſenſiblement; ainſi on aura deux expreſſions pour C′ dont les ſignes ſont la ſeule différence. On prend les ſignes ſupérieurs, quand la pointe du Δ ABC eſt au deſſus de BC ou en A, & on ſe ſert des autres, ſi le contraire a lieu.

Nous n'avons parlé jusqu'ici que de la manière de déterminer les angles droits avec la Règle à miroir: ainſi la ſeule figure qu'on pourroit décrire avec elle ſur le terrein ſeroit le quarré, tandis qu'on a ſouvent beſoin de polygones; il me paroit donc utile & agréable de pouvoir auſſi s'en ſervir pour d'autres figures régulières, comme le triangle équilatéral, le pentagone, l'exagone &c. &c.

On comprend aiſément qu'alors le miroir doit avoir une autre poſition: pour le *triangle*, il doit être tourné dans un angle de 30°; pour le *quarré*, dans un angle de 45°

- - - - *pentagone* - - - - - - - - 54°
- - - - *l'exagone* - - - - - - - - 60°
- - - - l'eptagone - - - - - - - - 64° 17′30
- - - - l'octogone - - - - - - - - 67° 30 &c.

En général l'angle du miroir doit égaler le $\frac{1}{2}$ angle

du polygone qu'on veut décrire; on ſent bien que *l'Heptagone* ne pourroit être décrit avec la Règle à miroir, car il eſt déjà aſſez peu aiſé de mettre le miroir juſte ſur les degrés, & combien de difficultés n'auroit-on pas à ſurmonter, ſi on vouloit le mettre jusqu'aux ſecondes? ainſi on fera bien de ne pas déſirer de décrire plus que jusqu'à l'exagone; le plateau de cuivre (DF) fig. 2. pl. 1. deviendroit autrement trop plein de marques pour qu'on ne s'embrouillât pas.

Pl. 3. *Fig.* 6.

Il eſt facile de démontrer *que l'angle du miroir doit être égal au demi angle du polygone qu'on veut décrire.* Car ſoit DE le miroir, l'oeil placé en F, & ∠FAB l'angle qu'on veut décrire. ∠EAH l'inclinaiſon du miroir par la HA perpendiculaire ſur la ligne AF & AC ⊥ ſur DE; donc on aura

$$\angle EAC = \angle FAH = L$$

en ſouſtrayant l'angle commun CAH il reſtera,

$$\angle EAH = \angle CAF = \frac{1}{2} \angle FAB.$$

donc l'angle de l'inclinaiſon du miroir doit être égal au demi angle du polygone.

Pl. 3. *Fig.* 7.

Pour décrire le quarré, on prend une ligne quelconque dans un terrein plat, on place la Regle en B & on regarde vers le piquet A. on fait tenir un autre piquet en *d* jusqu'à ce que l'on ait trouvé ∠ droit A B *d*, on fait CB de la longueur requiſe, faiſant mettre un piquet en C; on va enſuite de B en C, regardant ſur le bâton B; on fait alors tenir un piquet en E. de ſorte que ∠ E C B = 90°: on détermine la longueur de D C, la faiſant = C B = A B. les angles C & B ſont droits, les cotés ſont égaux, par conſéquent en plaçant la Règle en D, on découvrira les points A & C, ce qui fait que ∠ A D C eſt = 90°.

Pour le triangle. Pl. 3. *Fig.* 8.

Le miroir étant mis ſur 30°, on placera la Règle en B & on regardera vers A, faiſant tenir un piquet en C', de manière que A & C' ſoient également ſous les traits du miroir & du verre: On fait alors approcher celui qui tient le piquet jusqu'en C. (toujours dans la même droite C' B) pour avoir A B = B C; il eſt clair qu'alors A C ſera de la même longueur que les autres, puisque

∠ C B A = ∠ B C A = ∠ C A B = 60°.

Pour le pentagone. Pl. 3. Fig. 9.

Posez le miroir sur 54°, prenez la droite CB de la longueur précise, regardez vers C, placez quelqu'un avec un bâton en A′, pour avancer & reculer jusqu'à ce que vous voyez de manière que A′ & C soient couverts par les traits; prenez alors AB=BC, allez de B en A, & fixez l'oeil sur B pour trouver la place du piquet E′, prenez AE = AB; continuez ainsi de tous les points, & vous aurez le pentagone désiré.

Pl. 3. Fig. 10.

Dans l'exagone on agit de la même manière, le miroir étant placé sur 60°,

L'artiste qui fera de ces sortes de Règles à miroir pourroit très facilement trouver les différentes positions pour le miroir: il n'a qu'à prendre un bon astrolabe avec lequel il décrit dans un plan horizontal, les divers angles, pour les différents polygones. Dans le pentagone l'angle étant = 108°, il mettra son Astrolabe sur ce degré ou ∠ ABC = 108°. pl. 3, fig. 9. Pour donner la même position au miroir de la Règle, il la placera en B: il regardera vers A & il tournera le miroir sur son axe jusqu'à ce qu'il voie le point

point C. dans la même droite que AB ou A & C également couverts par les traits; il agira de la même manière pour tous les autres polygones.

CINQUIEME CHAPITRE.

DE L'EXACTITUDE DES OPÉRATIONS FAITES AVEC LA RÈGLE A MIROIR.

Les fautes dans les réſultats de la Règle à miroir peuvent dériver de pluſieurs cauſes; cependant les principales ſont

1°. La trop grande épaiſſeur du trait du miroir,

2°. La mauvaiſe poſition que le miroir peut avoir,

3°. L'inexactitude de l'obſervateur & de l'inſtrument même.

Pl. 3. *Fig.* 11.

Nous avons dit ci-deſſus que l'épaiſſeur du trait du miroir ne doit pas outrepaſſer $\frac{1}{10}$ de ligne, parcequ'une telle épaiſſeur ſur une longueur de ſept pouces couvroit déjà un arc de plus de 4'; c'eſt donc toujours une erreur

inévitable en déterminant l'angle droit (mais elle a cela de commun avec le meilleur Aſtrolabe.) il eſt vrai qu'elle diminue, ſi l'on agrandit la Règle, mais il ſeroit impoſſible de l'éviter entièrement.

Pour connoître la grandeur de l'erreur qui reſte toujours, on n'a qu'à s'imaginer le Δ iſoſcèle ABC que l'épaiſſeur du trait fait avec l'oeil de l'obſervateur; C D répréſente le fil & ϕ l'angle qui en provient, nommant alors AC = CB a & AB = X, on aura

$$a : \text{Sin. } \angle B = X : \text{Sin. } \angle \phi \text{ ou}$$

$$X = \frac{a \text{ Sin. } \phi}{\text{Sin. } \angle B}.$$

Si l'on prend a = 500 pieds & $\phi = 4' 54''$, X ne ſera pas encore de 8 pouces.

Il eſt abſolument néceſſaire que les côtés des Δ Δ rectangles ſoient bien meſurés & qu'on marque avec exactitude le point où le bâton doit être mis, pour déterminer l'angle droit; pour cet effet la fente faite dans la viſière ne doit être ni trop large ni trop étroite.

Pl. 3. *Fig.* 12.

Si elle étoit trop large, le rayon viſuel ſeroit différent, en regardant d'un côté A ou de l'autre B, de là naitroit

troit abſolument une eſpèce de parallaxe $\alpha C \beta$, & on ne ſauroit avec exactitude ſi le piquet devroit être placé dans la droite αA ou βB; mais quand la fente eſt trop étroite, il doit s'enſuivre que les objets ne ſe laiſſent pas voir aſſez diſtinctement, comme s'il y avoit quelque obſtacle entre l'oeil & l'objet; dans le commencement de ce traité, nous avons parlé de la manière d'agrandir & de diminuer la fente de la viſière.

Il faut avoir ſoin que les divers points dont on doit ſe ſervir pour les opérations ſoient dans le même plan horizontal: l'erreur qu'on peut commettre, en n'y faiſant pas attention, pourroit être exprimée par $(1 - \text{Cos.}\, a) \times b$ a étant l'angle de l'inclinaiſon du plan & b la ligne qu'on doit meſurer, prenant $a = 8°$ & $b = 500$ pieds; on aura moins d'un demi pied d'erreur.

La mauvaiſe poſition du miroir peut beaucoup contribuer aux fautes dans la pratique, puiſqu'elle ſe réunit avec celle qu'on fait en viſant mal; mais il eſt facile de trouver à quoi elle ſe monte.

Problème. Pl. 3. *Fig.* 13.

Trouver le changement que la diſtance AC eſt ſuſceptible d'éprouver; les angles droits du point C étant pris trop grands ou trop petits.

SOLUTION.

Si l'angle eſt trop grand, il ſera obtus ou $= AdB$ & le point cherché C ſera effectivement en d; comme auſſi le point F en f; on aura donc $\angle AdB$ au lieu de $\angle ACB$ & ABf; au lieu de ABF. ainſi qu'on meſure df & Bd, au lieu de BC & BF il s'en ſuivra qu'on prendra alors pour $AC = \frac{\overline{BC}^2}{FC}$, la valeur de $\frac{\overline{Bd}^2}{df}$; il ne nous reſte donc autre choſe qu'à trouver la différence entre $\frac{\overline{BC}^2}{CF}$ & $\frac{\overline{Bd}^2}{df}$ ou celle entre la diſtance vraie & celle apparente. —— Si l'on prend les angles trop petits ou $= A\delta B$ & ABE, on aura $\frac{\overline{B\delta}^2}{\delta E}$ au lieu de $\frac{\overline{Bc}^2}{cF}$: ſuppoſant $\angle CBF = a$ $\angle dBC = \angle CB\delta$ & $\angle EBF = \angle FBf = b$, on aura dans les $\Delta\Delta$ AdB & dBf.

Bd: Sin. $a = Ad$: Cos. $(a+b)$ & Bd : Cos. $\overline{a+b} = df$: Sin. $\overline{a+b}$; ce dont il ſuit $Ad = \frac{Bd \times \text{Cos. } \overline{a+b}}{\text{Sin. } a}$

&

& $\frac{\overline{Bd}^2}{df} = \frac{Bd \times \text{Cos.}\ \overline{a+b}}{fa+2b}$. ainſi la vraie diſtance s'exprime par Ad : $\frac{\overline{Bd}^2}{df} = f(a+2b)$: Sin. a ou

$$Ad = \frac{\overline{Bd}^2}{df} \times \frac{f(a+2b}{\text{Sin. } a}$$

L'angle droit étant pris trop petit, on auroit $A\delta B$ & ABE, au lieu de ACB & ABF, faiſant dans ce cas la même opération que dans l'autre, il ſuivra que $A\delta =$ $\frac{B\delta \times \text{Cos.}(a-b)}{\text{Sin. } a}$ & $\frac{\overline{B\delta}^2}{\delta E} = \frac{d\delta \text{ Cos.}(a-b)}{\text{Sin.}(a-2b)}$. ainſi la vraie diſtance ſeroit exprimée par

Ad: $\frac{\overline{Bb}^2}{\delta E} = f(a-2b)$: Sin. a ou $Ad = \frac{\overline{B\delta}^2}{\delta E} \times \frac{f(a-2b)}{\text{Sin. } a}$,

on peut remarquer qu'en général la diſtance cherchée eſt égale au quarré de l'un des côtés diviſé par un autre côté & multiplié par la fraction $\frac{f(a \pm 2b)}{fa}$; on ſe ſert de la ligne ſupérieure, quand les angles ſont trop grands & de l'autre, ſi on les trouve trop petits. — Il eſt évident que les fautes diminueront, ſi l'angle A accroit, c'eſt à dire en prolongant BC & CF.

On

On peut déterminer de la manière ſuivante la faute *b* faite avec la Règle à miroir.

Pl. 3. *Fig.* 14.

Déterminez exactement ∠ droit ABC, comme nous l'avons expliqué ci-deſſus. Placez alors la Règle en B, regardant vers A ou vers C; quand alors les deux objets ſont également ſous les traits, on conçluera que le miroir eſt bien tourné; mais ſi cela n'a pas lieu, on fera mettre un piquet en D ou ∂, ſelon que l'angle ſera ou trop grand ou trop petit; on meſurera enſuite AB & AD ou A∂, & on aura la grandeur des angles ψ & ϕ.

L'erreur qu'on pourroit faire augmente avec la diſtance ou la hauteur qu'on doit meſurer, ou quand l'angle *a* diminue (pl. 3. fig. 13). Nous venons de dire tantôt que l'erreur diminue, dès qu'on augmente l'angle *a* ou les lignes BC & CF, mais cela ne ſe fait pas bien aiſément avec les hauteurs, puisque CF qui eſt alors la hauteur de la canne du miroir ne peut avoir plus de 4 à 5 pieds.

Pl. 3. *Fig.* 13.

Etant $AC = \frac{\overline{BC}^2}{CF}$ & tang. $a = \frac{CF}{BC}$, AC ſera auſſi $= BC$

$= BC$ Cotang. $\angle a$ mais Cot. $a = \frac{AC}{BC}$ donc

tang. $a = \frac{BC}{AC}$ mais $\frac{BC}{AC} =$ eſt $= \frac{\sqrt{CF}}{AC}$ ainſi mettant

$n \times CF$ pour AC, on aura tang. $\angle a = \frac{\sqrt{CF}}{nCF} =$

$\sqrt{\frac{1}{n}}$ donc l'angle a diminuera ſi n augmente & la faute augmentera en diminuant $\angle a$.

Quoique la différence entre les fautes provenues pour avoir pris les angles trop petits ou trop grands ſoit bien peu conſidérable, pourtant elle le ſera davantage dans le dernier cas.

Tout ce que je viens de dire tant ſur la commodité que préſente la Règle à miroir que ſur ſon dégré d'exactitude fait voir que cet inſtrument peut être utile, dans la pratique de la Géométrie, principalement dans les circonſtances où, comme nous l'avons dit ci-deſſus, on n'a pas beſoin d'une grande préciſion.

On pourroit auſſi s'en ſervir dans des opérations pénibles de l'Arpentage, & même en quelque ſorte dans l'Aſtro-

no-

Pl. I.

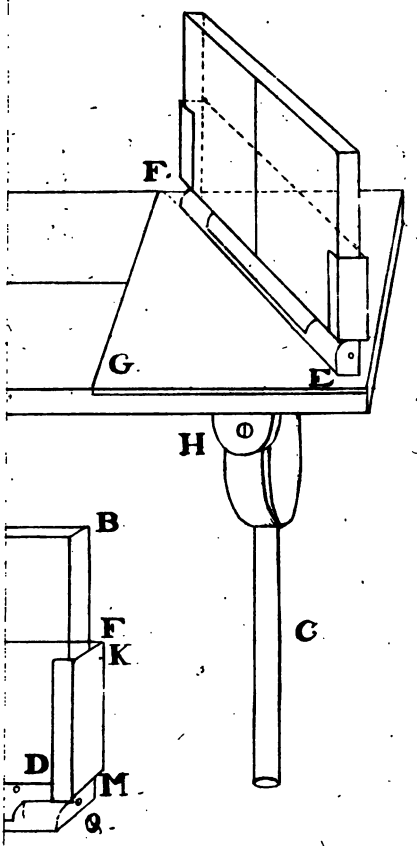
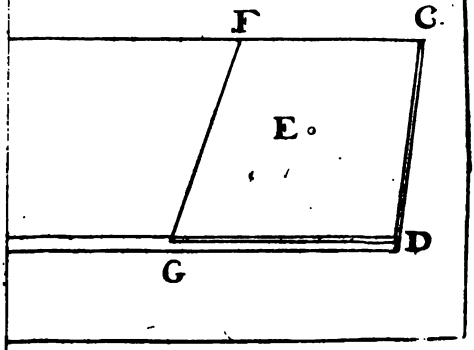


fig. 2



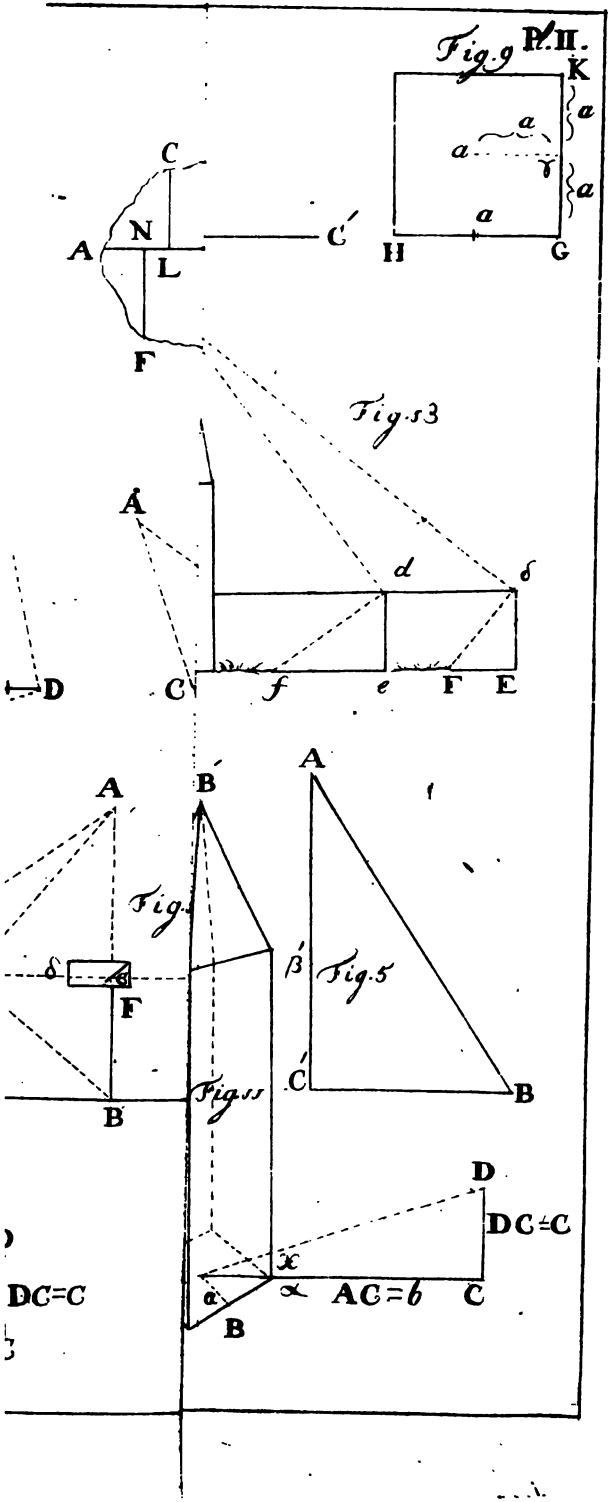


Fig. 9
K
a
a
a
a
a
C
N
A
L
C′
H
G
F
Fig. 13
A
d
δ
D
C
f
e
Γ
E
A
B′
A
Fig.
δ
F
B
Fig. 11
β′
Fig. 5
C′
B
D
DC=C
DC=C
x
α
AC=b
C
B

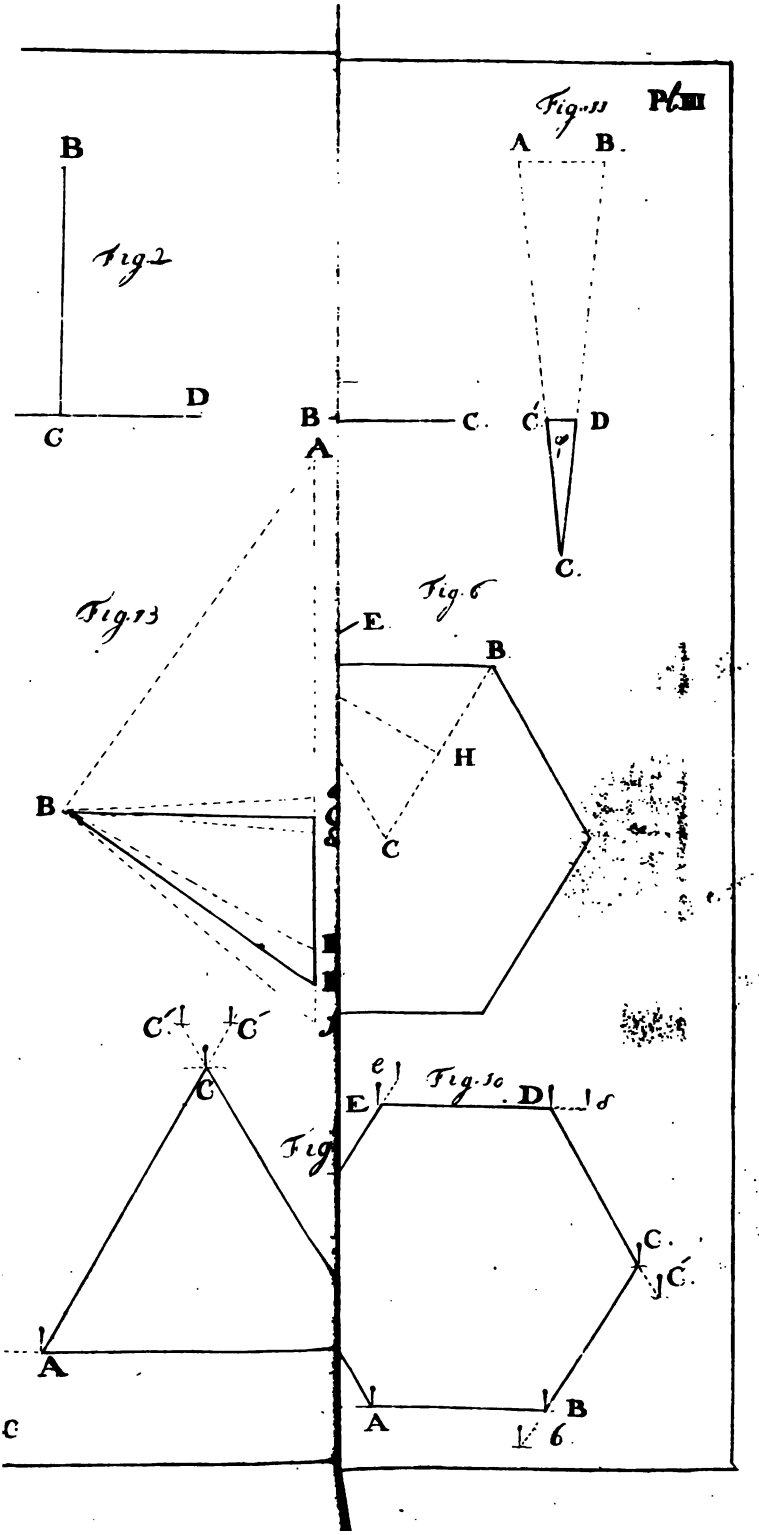


Fig. 11
Pl. III
A
B
Fig. 2
B
D
C
B
C
C
D
C
Fig. 13
Fig. 6
E
B
H
B
C
C
C
C
C
e
Fig. 10
E
D
8
Fig
C
C
A
A
B
6
C

FEB 21 1956